

2024

MATHEMATICS

Paper : MAT0300104

( Ordinary Differential Equation )

Full Marks : 60

Time : 2½ hours

The figures in the margin indicate full marks  
for the questions

1. Answer the following questions : 1×8=8

তলত দিয়া প্রশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা :

- (a) Write the order of the following differential equation :

তলত দিয়া অৱকল সমীকৰণটোৰ মাত্ৰা লিখা :

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 = \sqrt{\frac{d^2r}{ds^2} + 1}$$

- (b) State whether the following equation is linear or nonlinear :

তলত দিয়া সমীকৰণটো বৈখিক নে অবৈখিক উল্লেখ কৰা :

$$\frac{d^6x}{dt^6} + \left(\frac{d^4x}{dt^4}\right)\left(\frac{d^3x}{dt^3}\right) + x = t$$

( 2 )

- (c) Define integral curves of a first-order differential equation.

এটা প্রথম-মাত্রাৰ অৱকল সমীকৰণৰ অখণ্ড বক্র (integral curve)ৰ সংজ্ঞা দিয়া।

- (d) Write the general form of a Bernoulli differential equation.

এটা বাৰ্ণলী অৱকল সমীকৰণৰ সাধাৰণ ৰূপটো লিখা।

- (e) Find the integrating factor of the linear differential equation

$$\frac{dy}{dx} + \frac{3y}{x} = 6x^2$$

বৈখিক অৱকল সমীকৰণ  $\frac{dy}{dx} + \frac{3y}{x} = 6x^2$  ৰ

অনুকলন গুণক উলিওৱা।

- (f) Evaluate :

নিৰ্ণয় কৰা :

$$W(e^x, e^{-x})$$

- (g) Write down the UC set of the UC function  $x^n e^{ax}$ .

$x^n e^{ax}$  UC ফলনটোৰ UC সংহতিটো লিখা।

- (h) Define an exact differential equation.

এটা যথার্থ অৱকল সমীকৰণৰ সংজ্ঞা দিয়া।

( 3 )

2. Answer any six of the following questions :  
2×6=12

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ যি কোনো ছয়টাৰ উত্তৰ কৰা :

- (a) For certain values of the constant  $m$  the function  $f$  defined by  $f(x) = e^{mx}$  is a solution of the differential equation

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 4\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

Determine all such values of  $m$ .

প্ৰৱক  $m$  ৰ কিছুমান মানৰ বাবে  $f(x) = e^{mx}$  ফলনটো

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 4\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

অৱকল সমীকৰণটোৰ এটা সমাধান হয়।  $m$  ৰ তেনেকুৱা সকলো মান নিৰ্ণয় কৰা।

- (b) Examine whether or not, the differential equation  $(3x^2y+2)dx - (x^3+y)dy = 0$  is exact.

$(3x^2y+2)dx - (x^3+y)dy = 0$  অৱকল সমীকৰণটো যথার্থ হয় নে নহয় পৰীক্ষা কৰা।

- (c) Find the general solution of

সাধাৰণ সমাধান উলিওৱা

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 0$$

( 4 )

(d) Transform the equation

$$(x^2 - 3y^2) dx + 2xy dy = 0$$

to a separable equation by appropriate change of variables.

যথাযথ চলক পৰিৱৰ্তন কৰি

$$(x^2 - 3y^2) dx + 2xy dy = 0$$

অৱকল সমীকৰণটোক এটা পৃথকীকৰণীয় সমীকৰণলৈ ৰূপান্তৰ কৰা।

(e) Show that the functions  $e^{-x}$ ,  $e^{3x}$  and  $e^{4x}$  are linearly independent.

দেখুওৱা যে  $e^{-x}$ ,  $e^{3x}$  আৰু  $e^{4x}$  ফলনকেইটা বৈধিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ।

(f) For the differential equation

$$(4x + 3y^2) dx + 2xy dy = 0$$

find an integrating factor of the form  $x^n$ , where  $n$  is a positive integer, so that the equation becomes exact.

$(4x + 3y^2) dx + 2xy dy = 0$  অৱকল সমীকৰণটোৰ বাবে  $x^n$  আকাৰৰ এটা অনুকলন গুণক উলিওৱা, য'ত  $n$  এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা, যাতে সমীকৰণটো যথাৰ্থ হয়।

( 5 )

(g) The roots of the auxiliary equation corresponding to a certain 8th order homogeneous linear differential equation with constant coefficients are

$$4, 4, 4, 4, 2 + 3i, 2 - 3i, 2 + 3i, 2 - 3i$$

Write the general solution.

ধ্ৰুৱক সহগবিশিষ্ট এটা ৪তম মাত্ৰাৰ সমমাত্ৰিক বৈধিক অৱকল সমীকৰণৰ সহায়ক সমীকৰণটোৰ মূলবোৰ হ'ল

$$4, 4, 4, 4, 2 + 3i, 2 - 3i, 2 + 3i, 2 - 3i$$

সমীকৰণটোৰ সাধাৰণ সমাধান লিখা।

(h) Given that a particular integral of

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 1$$

is  $y = \frac{1}{6}$  and a particular integral of

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = x \text{ is } y = \frac{x}{6} + \frac{5}{36}.$$
 Then

find the particular integral of

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 2 - 12x$$

( 6 )

দিয়া আছে যে অৱকল সমীকৰণ

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 1 \text{ ব}$$

বিশেষ অনুকল  $y = \frac{1}{6}$  আৰু অৱকল সমীকৰণ

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = x \text{ ব বিশেষ অনুকল}$$

$y = \frac{x}{6} + \frac{5}{36}$  তেজ্ঞে অৱকল সমীকৰণ

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 2 - 12x \text{ ব}$$

বিশেষ অনুকল উলিওৱা।

- (i) Show that every function  $f$  defined by  $f(x) = 2 + ce^{-2x^2}$ , where  $c$  is an arbitrary constant, is a solution of the differential equation

$$\frac{dy}{dx} + 4xy = 8x$$

দেখুওৱা যে  $f(x) = 2 + ce^{-2x^2}$  ৰে সংজ্ঞাবদ্ধ সকলোবোৰ ফলন  $f$ , য'ত  $c$  এটা যি কোনো ধ্ৰুৱক হয়,

$$\frac{dy}{dx} + 4xy = 8x$$

অৱকল সমীকৰণটোৰ এটা সমাধান হয়।

( 7 )

- (j) The general solution of a second-order homogeneous differential equation with constant coefficients is

$$y = c_1e^x + c_2xe^x$$

Construct the equation.

এটা দ্বিঘাতৰ ধ্ৰুৱক সহগবিশিষ্ট সমমাত্রিক অৱকল সমীকৰণৰ সাধাৰণ সমাধান হ'ল

$$y = c_1e^x + c_2xe^x$$

সমীকৰণটো সাজি উলিওৱা।

3. Answer any four of the following questions :

5×4=20

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ যি কোনো চাৰিটাৰ উত্তৰ কৰা :

- (a) Show that  $5x^2y^2 - 2x^3y^2 = 1$  is an implicit solution of the differential equation

$$x\frac{dy}{dx} + y = x^3y^3$$

on the interval  $0 < x < \frac{5}{2}$ .

দেখুওৱা যে  $0 < x < \frac{5}{2}$  অন্তৰালত

$$5x^2y^2 - 2x^3y^2 = 1 \text{ টো } x\frac{dy}{dx} + y = x^3y^3$$

অৱকল সমীকৰণৰ এটা অন্তৰ্নিহিত সমাধান হয়।

- (b) Determine the constant A such that the equation

$$(x^2 + 3xy)dx + (Ax^2 + 4y)dy = 0$$

is exact. Then solve the exact equation.

$$1+4=5$$

$$(x^2 + 3xy)dx + (Ax^2 + 4y)dy = 0 \quad \text{অবকল}$$

সমীকরণটো যথার্থ হোৱাকৈ A ৰ মান উলিওৱা। যথার্থ সমীকরণটো সমাধান কৰা।

- (c) Solve the Bernoulli equation :

বাণলী সমীকরণটো সমাধান কৰা :

$$x \frac{dy}{dx} + y = -2x^6 y^4$$

- (d) Solve the initial value problem :

প্রাৰম্ভিক মানযুক্ত সমস্যাতো সমাধান কৰা :

$$(x^2 + 1) \frac{dy}{dx} + 4xy = x, \quad y(2) = 1$$

- (e) Given that  $y = x$  is a solution of

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 4x \frac{dy}{dx} + 4y = 0$$

Find a linearly independent solution by reducing the order.

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 4x \frac{dy}{dx} + 4y = 0 \quad \text{অবকল সমীকরণটোৰ}$$

$y = x$  এটা সমাধান হয়। সমীকরণটোৰ মাত্ৰা হ্রাস কৰি আনটো বৈখিকভাৱে স্বতন্ত্র সমাধান উলিওৱা।

- (f) Solve the Cauchy-Euler equation :

কচি-ইউলাৰ সমীকরণটো সমাধান কৰা :

$$3x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 4x \frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

- (g) Solve the following initial value problem using method of undetermined coefficients :

অনিৰ্ণেয় সহগ পদ্ধতিৰে তলত দিয়া প্রাৰম্ভিক মানযুক্ত সমীকরণটো সমাধান কৰা :

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4 \frac{dy}{dx} + 3y = 9x^2 + 4, \quad y(0) = 6, \quad y'(0) = 8$$

- (h) Show that the function  $f$  defined by  $f(x) = (2x^2 + 2e^{3x} + 3)e^{-2x}$  satisfies the differential equation

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 6e^x + 4xe^{-2x}$$

and also the condition  $f(0) = 5$ .

দেখুওৱা যে,  $f(x) = (2x^2 + 2e^{3x} + 3)e^{-2x}$  ৰে

সংজ্ঞাবদ্ধ  $f$  ফলনটোৰে অবকল সমীকরণ

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 6e^x + 4xe^{-2x} \text{ ক}$$

সিদ্ধ কৰে আৰু লগতে  $f(0) = 5$  চৰ্তও সিদ্ধ কৰে।

4. Answer any two of the following questions :

10×2=20

তলত দিয়া প্রশ্নবোৰৰ যি কোনো দুটাৰ উত্তৰ কৰা :

(a) Show that the linear differential equation

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

has an integrating factor of the form  $e^{\int P(x)dx}$  and a one-parameter family of solution

$$ye^{\int P(x)dx} = \int e^{\int P(x)dx} Q(x) dx + C$$

দেখুওৱা যে বৈশ্বিক অৱকল সমীকৰণ

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \text{ ৰ}$$

এটা  $e^{\int P(x)dx}$  আকৃতিৰ অনুকলন গুণক থাকে আৰু লগতে সমীকৰণটোৰ এটা একক প্ৰাচলযুক্ত সমাধানৰ পৰিচয়াল হ'ল

$$ye^{\int P(x)dx} = \int e^{\int P(x)dx} Q(x) dx + C$$

(b) Solve by transforming to homogeneous equation :

সমমাত্ৰিক সমীকৰণলৈ ৰূপান্তৰ কৰি সমাধান কৰা :

$$(x - 2y + 1) dx + (4x - 3y - 6) dy = 0$$

(c) Consider the following differential equation :

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

(i) Show that  $x$  and  $x^2$  are linearly independent solutions of this equation on the interval  $0 < x < \infty$ .

(ii) Write the general solution of the equation.

(iii) Find the solution that satisfies the conditions  $y(1) = 3$ ,  $y'(1) = 2$ . Explain why this solution is unique. 4+1+5=10

তলত দিয়া অৱকল সমীকৰণটো লোৱা :

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

(i) দেখুওৱা যে  $0 < x < \infty$  অন্তৰালত  $x$  আৰু  $x^2$  সমীকৰণটোৰ দুটা বৈশ্বিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ সমাধান।

(ii) সমীকৰণটোৰ সাধাৰণ সমাধান লিখা।

(iii)  $y(1) = 3$ ,  $y'(1) = 2$  চৰ্ত দুটা সিদ্ধ কৰা সমাধানটো উলিওৱা। এই সমাধানটো কিয় একক, ব্যাখ্যা কৰা।

- (d) Find the general solution using method of undetermined coefficients

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{d^2 y}{dx^2} = 3x^2 + 4 \sin x - 2 \cos x$$

অনির্ণেয় সহগ পদ্ধতিৰে সাধাৰণ সমাধান উলিওৱা

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{d^2 y}{dx^2} = 3x^2 + 4 \sin x - 2 \cos x$$

- (e) Solve by the method of variation of parameters

প্ৰাচলৰ তাৰতম্য পদ্ধতিৰে সমাধান কৰা

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = \cot x$$

\*\*\*