Total number of printed pages – 20

3 (Sem-4/CBCS) MAT HG/RC

2025

MATHEMATICS

(Honours Generic/Regular)

Answer the Questions from any one option.

OPTION–A

Paper : MAT–RC–4016/MAT–HG–4016

(Real Analysis)

OPTION–B

Paper : MAT–HG–4026

(Numerical Analysis)

Full Marks : 80

Time : Three hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

*Answer **either** in English **or** in Assamese*

OPTION–A

Paper : MAT–RC–4016/MAT–HG–4016

(Real Analysis)

1. Answer ***any ten*** of the following as directed : $1\times10=10$

তলৰ *যিকোনো দহটাৰ* নিৰ্দেশ অনুসৰি উত্তৰ কৰা ঃ

(i) Express the interval $[a, b]$ as a subset of the set of real numbers in set builder method.

$[a, b]$ অন্তৰটোক বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতিৰ এটা উপসংহতি হিচাবে প্ৰকাশ কৰা।

(ii) Write the supremum and infimum of the set of positive integers if exist.

ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতিটোৰ লঘিষ্ঠ উচ্চসীমা আৰু গৰিষ্ঠ নিম্নসীমা নিৰ্ণয় কৰা।

(iii) Write true of false :
"The set of real numbers is the neighbourhood of each of its points."

সঁচা নে মিছা লিখা ঃ
"বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতিটো ইয়াৰ প্ৰতিটো বিন্দুৰে এটা প্ৰতিবেশ।"

(iv) Define a limit point of a set of real numbers.

সংহতি এটাৰ চৰম বিন্দুৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(v) Define a Cauchy sequence.

ক'চী অনুক্ৰম এটাৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(vi) Find the condition such that the positive term series $1+r+r^2+\cdots$ converges.

$1+r+r^2+\cdots$ ধনাত্মক পদৰ শ্ৰেণীটো অভিসাৰী হোৱাৰ চৰ্ত নিৰ্ণয় কৰা।

(vii) When is a series said to be absolutely convergent?

কেতিয়া এটা শ্ৰেণীক পৰম অভিসাৰী কোৱা হয় ?

(viii) Find the limit point of the set $\{1/n : n\in N\}$.

$\{1/n : n\in N\}$ সংহতিটোৰ চৰম বিন্দু নিৰ্ণয় কৰা।

(ix) Write true or false :
"An empty set is an open set."

সঁচা নে মিছা লিখা ঃ
"ৰিক্ত সংহতি এটা মুক্ত সংহতি হয়।"

(x) Give example to show intersection of infinite number of open sets may not be open.

উদাহৰণৰ সহায়ত দেখুওঁৱা যে অসীম সংখ্যক মুক্ত সংহতিৰ মিলন সংহতিটো মুক্ত সংহতি নহ্বও পাৰে।

(xi) State the 'order completeness' property of the set of real numbers.

বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতিটোৰ 'অৰ্ডাৰ কম্প্লিটনেছ' ধৰ্মটো লিখা।

(xii) Express the set $S = \{x \in R : 2 < x + 7 \leq 9\}$ in interval notation.

$S = \{x \in R : 2 < x + 7 \leq 9\}$ সংহতিটোক অন্তৰাল ৰূপত প্ৰকাশ কৰা।

(xiii) Give an example of an open set which is not an interval.

এটা মুক্ত সংহতিৰ উদাহৰণ দিয়া যিটো অন্তৰাল নহয়।

(xiv) Give an example of a set which has no limit point.

এটা সংহতিৰ উদাহৰণ দিয়া যাৰ কোনো চৰম বিন্দু নাই।

(xv) Which of the following is neighbourhood of the point 2?

ইয়াৰ কোনটো সংহতি 2 বিন্দুটোৰ প্ৰতিবেশ হ'ব ?

(a) $]2, 3[$, (b) $[1, 3]$, *(c)* $]1, 3[$, *(d)* $[1, 2]$

2. Answer ***any five*** of the following : 2×5=10

তলৰ ***যিকোনো পাচটাৰ*** উত্তৰ কৰা ঃ

(a) Show that the set

$$\left\{1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \cdots\right\}$$ is neither open nor a closed set.

দেখুওৱা যে $\left\{1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \cdots\right\}$ সংহতিটো মুক্ত বা বন্ধ সংহতি নহয়।

(b) Define uniform continuity of a real function.

বাস্তৱ ফলন এটাৰ সুষম অনবিচ্ছিন্নতাৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(c) Find the supremum and infimum of the following set :

তলৰ সংহতিটোৰ লঘিষ্ঠ উচ্চসীমা আৰু গৰিষ্ঠ নিম্নসীমা নিৰ্ণয় কৰা

$$\left\{1 + \frac{(-1)^n}{n} : n \in N\right\}$$

(d) Evaluate (মান নিৰ্ণয় কৰা) ঃ

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

(e) Show that the series $\sum \frac{1}{n}$ does not converge.

দেখুওৱা যে $\sum \frac{1}{n}$ শ্ৰেণীটো অভিসাৰী নহয়।

(f) Show that (দেখুওৱা যে)

$$lim \frac{1+2+3+4+\cdots+n}{n^2} = \frac{1}{2}.$$

(g) If G and H are two closed sets, then prove that $G \cap H$ is also a closed set.

যদি G আৰু H বন্ধ সংহতি হয়, প্ৰমাণ কৰা যে $G \cap H$ ও এটা বন্ধ সংহতি হ'ব।

(h) Show that the function $f(x)=|x|$ is continuous at $x=0$.

দেখুওৱা যে $f(x)=|x|$ ফলনটো $x=0$ বিন্দুত অনবিচ্ছিন্ন হ'ব।

3. Answer ***any four*** of the following: 5×4=20

তলৰ *যিকোনো চাৰিটাৰ* উত্তৰ কৰা ঃ

(a) Show that every uniformly continuous function is continuous in an interval.

প্ৰমাণ কৰা যে এটা অন্তৰালত সুষম অনবিচ্ছিন্ন ফলন এটা সদায় অনবিচ্ছিন্ন।

(b) If S and T are two subsets of the set of real numbers, then show that

$$(S \cup T)' = S' \cap T'.$$

যদি S আৰু T বাস্তৱ সংখ্যাৰ দুটা উপসংহতি হয় তেন্তে দেখুওৱা যে $(S \cup T)' = S' \cap T'$.

(c) Test the convergence of the series

$$1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$$

$1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$ শ্ৰেণীটো অভিসাৰিতা পৰীক্ষা কৰা।

(d) Show that every bounded sequence with a unique limit point is convergent.

দেখুওৱা যে অদ্বিতীয় চৰম বিন্দু থকা প্ৰতিটো পৰিবদ্ধ অনুক্ৰম অভিসাৰী হ'ব।

(e) Prove that for every real number x, there exists a natural number n such that $x \le n$.

প্ৰমাণ কৰা যে প্ৰতিটো বাস্তৱ সংখ্যা xৰ বাবে এটা স্বাভাৱিক সংখ্যা n থাকে, যাতে $x \le n$ হয়।

(f) Prove that every bounded sequence has a limit point.

দেখুওৱা যে প্ৰতিটো পৰিবদ্ধ অনুক্ৰমৰ এটা চৰম বিন্দু থাকে।

(g) Prove that the limit of a function at a point, if it exists, is always unique.

দেখুওৱা যে যদি ফলন এটাৰ চৰম মান থাকে, তেন্তে সি অদ্বিতীয় হব।

(h) Define removable discontinuity of a real function. Give an example.

বাস্তৱ ফলন এটাৰ পৰিবৰ্তনীয় বিচ্ছিন্নতাৰ সংজ্ঞা দিয়া আৰু এটা উদাহৰণ দিয়া।

4. Answer **any four** of the following : $10\times4=40$

তলৰ *যিকোনো চাৰিটাৰ* উত্তৰ কৰা ঃ

(a) Show that the function f defined below is discontinuous at every point :

দেখুওৱা যে তলত দিয়া f ফলনটো সকলোবোৰ বিন্দুতে বিচ্ছিন্ন ঃ

$f(x)=1$, if x is irrational

যদি এটা অপৰিমেয় সংখ্যা

and $f(x)=-1$ if x is rational

যদি এটা পৰিমেয় সংখ্যা

(b) (i) Show that the series

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$ is convergent. 5

দেখুওৱা যে $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$ শ্ৰেণীটো অভিসাৰী।

(ii) Show that the limit, if exists, of a convergent sequence is unique. 5

দেখুওৱা যে, যদি অভিসাৰী অনুক্ৰমৰ চৰম বিন্দু স্থিত হয় তেন্তে ই একক।

(c) Define absolute value of a real number. Show that for real numbers x and y 1+(3+3+3)=10

বাস্তৱ সংখ্যা এটাৰ পৰম মানৰ সংজ্ঞা দিয়া। দুটা বাস্তৱ সংখ্যা x আৰু y ৰ বাবে প্ৰমাণ কৰা যে

(i) $|xy|=|x||y|$

(ii) $|x+y|\leq|x|+|y|$

(iii) $|x-y|\geq|(|x|-|y|)|$

(d) Prove that a set is open if and only if its complement is a closed set.

প্ৰমাণ কৰা যে এটা সংহতি মুক্ত হ'ব যদি আৰু যদিহে ইয়াৰ পূৰক এটা বন্ধ সংহতি হয়।

(e) Prove that a sequence of reals is convergent if and only if it is a Cauchy sequence.

প্ৰমাণ কৰা যে বাস্তব সংখ্যা এটাৰ অনুক্ৰম এটা পৰিবদ্ধ হ'ব যদি আৰু যদিহে সি এটা কচ্চী অনুক্ৰম হয়।

(f) Show that a necessary and sufficient condition for a sequence to be convergent is that to each $\varepsilon > 0$ there exists a positive integer m such that $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$ for all $n \geq m,\ p \geq 1$.

দেখুওৱা যে এটা অনুক্ৰম পৰিবদ্ধ হোৱাৰ প্ৰয়োজনীয় আৰু পৰ্যাপ্ত চৰ্ত হ'ল প্ৰতিটো $\varepsilon > 0$ ৰ বাবে এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা m স্থিত হ'ব, যাতে $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$ য'ত $n \geq m,\ p \geq 1$.

(g) Prove that $\sqrt{2}$ is not a rational number.

প্ৰমাণ কৰা যে $\sqrt{2}$ এটা পৰিমেয় সংখ্যা নহয়।

(h) Prove that $\lim_{x \to a} f(x)$ exists finitely for a real function f if and only if for every $\varepsilon > 0$ there exists a neighbourhood N of a, such that $|f(x) - f(x_1)| < \varepsilon$ for all $x,\ x_1 \in N$ and $x,\ x_1 \neq a$.

প্ৰমাণ কৰা যে এটা বাস্তব ফলন f ৰ ক্ষেত্ৰত $\lim_{x \to a} f(x)$ স্থিত হ'ব যদি আৰু যদিহে প্ৰতিটো $\varepsilon > 0$ ৰ বাবে a ৰ এটা প্ৰতিবেশ N থাকিব, যাতে সকলো $x,\ x_1 \in N$ ৰ বাবে $|f(x) - f(x_1)| < \varepsilon$, $x,\ x_1 \neq a$.

(i) Prove that every convergent sequence is bounded but the converse may not be true.

দেখুওৱা যে প্ৰতিটো অভিসাৰী অনুক্ৰম পৰিবদ্ধ হয় কিন্তু ইয়াৰ বিপৰীত উক্তিটো সত্য নহ'বও পাৰে।

(j) Prove that sequence $\{x_n\}$ where $x_n = \dfrac{3n+1}{n+2}$ is monotonic increasing and bounded. Also find its limit. 3+3+4=10

প্ৰমাণ কৰা যে অনুক্ৰম $\{x_n\}$ য'ত $x_n = \dfrac{3n+1}{n+2}$ একদিষ্ট বৰ্ধমান, পৰিবদ্ধ। ইয়াৰ চৰম বিন্দু নিৰ্ণয় কৰা।

OPTION–B

Paper : MAT–HG–4026

(Numerical Analysis)

1. Answer the following questions : 1×10=10

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা :

(a) In Gauss-Jordan method, the resulting coefficient matrix for a linear system of equation transformed into :

গাউজ-জৰ্দান পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰোতে এটা ৰৈখিক গোটৰ গুণাংক মৌলকক্ষ তলৰ কোনটো ৰূপলৈ ৰূপান্তৰ হয়?

(i) Symmetric matrix

সমমিত মৌলকক্ষ

(ii) Skew-symmetric matrix

বিষম-সমমিত মৌলকক্ষ

(iii) Identity matrix

একক মৌলকক্ষ

(iv) None of the above

ওপৰৰ এটাও নহয়

(Choose the correct option)

(শুদ্ধ উত্তৰটো বাচি উলিওৱা)

(b) If c is constant, find $\Delta c = ?$

যদি c এটা ধ্ৰুৱক ৰাশি, তেন্তে $\Delta c = ?$

(c) Prove (প্ৰমাণ কৰা)

$$\nabla E = \Delta .$$

(d) Name an interpolation polynomial that should be used to interpolate a function whose input data are equally spaced.

এটা অন্তৰ্বেশন বহুপদৰ নাম লিখা যি এটা ফলনক অন্তৰ্বেশন কৰে, য'ত ৰাশিসূচকবোৰৰ ৰাশি অন্তৰাল সমান হয়।

(e) When is Newton's divided difference formula used?

নিউটনৰ বিভাজিত অন্তৰৰ সূত্ৰটো কেতিয়া ব্যৱহাৰ হয়?

(f) What do you mean by numerical integration?

সংখ্যাত্মক অনুকলন কাক বোলে?

(g) Write the formula of first derivative at $x = x_0$ for three equally spaced point.

$x = x_0$ বিন্দুৰ তিনিটা সমান অন্তৰিক্ষ বিন্দুৰ প্ৰথম অৱকলজৰ সূত্ৰটো লিখা।

(h) What is the degree of $f(x)$ in Trapezoidal rule ?

Trapezoidal পদ্ধতিত $f(x)$ ৰ ঘাত কিমান?

(i) Where is Euler's method used ?

অয়লাৰ পদ্ধতি ক'ত ব্যৱহাৰ কৰা হয়?

(j) Write down the value of $\int_a^b f(x)dx$ by trapezoidal rule when $[a,b]$ is divided into two subintervals.

Trapezoidal rule ৰ সহায়ত $\int_a^b f(x)dx$ ৰ মান উলিওৱা যেতিয়া $[a,b]$ দুটা ভাগত বিভক্ত কৰা হয়।

2. Answer the following questions : $2\times5=10$

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা :

(a) Establish the relation—

সম্বন্ধটো স্থাপন কৰা—

$$(I+\Delta)(I-\nabla)=I$$

(b) Evaluate (মান নিৰ্ণয় কৰা) ঃ

$$\left(\frac{\Delta^2}{E}\right)x^3$$

(c) Construct a divided difference table from the following data.

তলত দিয়া তালিকাৰ পৰা এখন বিভাজিত অন্তৰৰ টেবুল গঠন কৰা :

x:	−1	1	2	3
y:	−21	15	12	3

(d) What is numerical method ? Give an example of its application.

সংখ্যাত্মক পদ্ধতি কাক কোৱা হয়? ইয়াক ব্যৱহাৰ ক'ত কৰে? এটা উদাহৰণ দিয়া।

(e) What is extrapolation ? Name an extrapolation method.

Extrapolation মানে কি? এটা extrapolation বিধিৰ নাম লিখা।

3. Answer ***any four*** questions from the following : $5\times4=20$

তলৰ *যিকোনো চাৰিটা* প্ৰশ্নৰ উত্তৰ কৰা :

(a) Solve the following system of equation by gauss elimination method :

Gauss elimination পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি সমাধান কৰা :

$$2x+2y+4z=18$$
$$x+3y+2z=13$$
$$3x+y+3z=14$$

(b) Show that—

দেখুওৱা যে—

(i) $\delta \equiv \nabla(1-\nabla)^{-1/2}$

(ii) $E\Delta \equiv \Delta E$

(c) Using Newton's forward interpolation formula find the cubic polynomial which takes the data from the following table.

নিউটনৰ অগ্ৰগামী অন্তৰ্বেশন সূত্ৰ ব্যৱহাৰ কৰি তলত উল্লেখ কৰা টেবুলখনৰ পৰা এটা ত্ৰিমাত্ৰিক বহুপদ ৰাশি নিৰ্ণয় কৰা ঃ

x :	0	1	2	3
$f(x)$:	1	2	1	10

(d) Obtain piecewise linear interpolating polynomial for the data given below :

তলৰ তালিকাৰ কাৰণে বহুপদ ৰাশি উলিওৱা :

x :	1	2	4	8
y :	3	7	21	73

(e) Use Trapezoidal rule to find the value of $\int_0^6 \frac{dx}{1+x^2}$ by taking six ordinates.

ছয়টা অন্তৰাললৈ Trapezoidal বিধি ব্যৱহাৰ কৰি $\int_0^6 \frac{dx}{1+x^2}$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

(f) Given $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}$ with $y=1$ for $x=0$. Find y approximately for $x=0.1$ by Euler's method.

দিয়া আছে $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}$ য'ত $x=0$ ৰ বাবে $y=1$।

অয়লাৰৰ পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি $x=0.1$ৰ বাবে y ৰ মোটামুটি মান নিৰ্ণয় কৰা।

4. Answer ***any four*** questions from the following : 10×4=40

তলৰ *যিকোনো চাৰিটা* প্ৰশ্নৰ উত্তৰ কৰা :

(a) Solve the system of equations correct upto 3 decimal places using Gauss-Seidel iteration method.

Gauss-Seidel iteration পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি তলৰ ৰৈখিক সমীকৰণ গোটৰ সমাধান 3 দশমিক স্থানলৈ শুদ্ধকৈ উলিওৱা:

$$10x_1 + x_2 + x_3 = 12$$
$$2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13$$
$$2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14$$

(b) Solve the system of equations given below using Jacobi iteration method. Use the initial approximation as $x_i = 0\,;\, i = 1,2,3$.

জেকবি পুনৰাবৃত্তি ব্যৱহাৰ কৰি ৰৈখিক সমীকৰণ গোটৰ সমাধান কৰা। প্ৰাৰম্ভিক অনুমান $x_i = 0; i = 1,2,3$

$$4x_1 + x_2 + x_3 = 2$$
$$x_1 + 5x_2 + 2x_3 = -6$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -4$$

(c) Define backward difference operator. When should we use Newton-Gregory backword difference interpolation formula? Mention an advantage and a disadvantage of this formula. For the data given below find $f(7.5)$.

পশ্চাৎৱৰ্ত্তী সংকাৰকৰ সংজ্ঞা দিয়া। নিউটনৰ পশ্চাৎৱৰ্ত্তী অন্তৰ্বেশন সূত্ৰ কেতিয়া ব্যৱহাৰ কৰিব লাগে? এই সূত্ৰৰ এটা সুবিধা আৰু এটা অসুবিধা লিখা। তলত দিয়া তালিকাৰ পৰা $f(7.5)$ ৰ মান উলিওৱা।

x:	1	2	3	4	5	6	7	8
y:	1	8	27	64	125	216	343	512

(d) Derive Lagrange's interpolation formula. Find the interpolating polynomial from the data given below:

লাগ্ৰাঞ্জ অন্তৰ্বেশন সূত্ৰটো প্ৰাপ্ত কৰা। ইয়াক ব্যৱহাৰ কৰি তলত দিয়া তালিকাৰ অন্তৰ্বেশন বহুপদ উলিওৱা :

x:	1	2	3	4
y:	2	4	8	16

(e) (i) Name the difference formulae for finding approximate derivatives based on using a straight line to interpolate the given data. Use them to estimate $y'(1)$ from the data given below: 5

তলত দিয়া তথ্যবোৰৰ অৱকলজ এডাল সৰল ৰেখাৰ ওপৰত ভিত্তি কৰি অন্তৰ উলিওৱা বিভিন্ন বিভাজিত সূত্ৰবোৰ লিখা আৰু সিহঁতক ব্যৱহাৰ কৰি $y'(1)$ উলিওৱা ঃ

x:	−1	0	1	2	3
y:	½	1	2	4	8

(ii) Prove that

(প্ৰমাণ কৰা)

$$e^x = \left(\frac{\Delta^2}{E}\right) e^x \frac{Ee^x}{\Delta^2 e^x}$$ 5

(f) Find the integral

$$\int_1^2 \frac{dx}{1+x}$$

using Trapezoidal rule, Simpson's $\frac{1}{3}$ rule and Romberg integration.

ট্ৰেপিযইড'ল সূত্ৰ, চিম্পচন $\frac{1}{3}$ ৰ সূত্ৰ আৰু ৰ'মবাৰ্গ অনুকলন ব্যৱহাৰ কৰি $\int_1^2 \frac{dx}{1+x}$ নিৰ্ণয় কৰা।

(g) What are the two types of methods for finding numerical solution to ODE? Name *one* method from each type. Solve using Euler's method : 2+2+6=10

ODE সমাধান কৰা দুইবিধ সংখ্যাত্মক পদ্ধতি কি? দুয়োৰে এটাকৈ উদাহৰণ দিয়া। অয়লাৰৰ পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি সমাধান কৰা ঃ

$$y' = 4e^{0.8t} - 0.5y$$

$$y(0) = 2 \text{ for } 0 \le t \le 4$$

$$h = 1$$

(h) Evaluate $\int_0^2 \frac{dx}{x^2+4}$ using Romberg's method.

ৰ'মবাৰ্গৰ পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি $\int_0^2 \frac{dx}{x^2+4}$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।