

Total number of printed pages – 20

3 (Sem-2/CBCS) MAT HG 1/2, RE

2025

MATHEMATICS

(Honours Generic/Regular)

For Honours Generic

Answer the Questions from any one Option.

OPTION-A

Paper : MAT-HG-2016/MAT-RC-2016

(Algebra)

OPTION-B

Paper : MAT-HG-2026

(Discrete Mathematics)

Full Marks : 80

Time : Three hours

***The figures in the margin indicate
full marks for the questions.***

Answer either in English or in Assamese.

OPTION-A

Paper : MAT-HG-2016/MAT-RC-2016

(Algebra)

1. Answer the following questions : $1 \times 10 = 10$

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া :

(i) State *true* or *false* :

শুদ্ধ নে অশুদ্ধ লিখা :

Any group of prime order is cyclic.

মৌলিক মাত্ৰাৰ যিকোনো সংঘ চক্ৰীয়।

(ii) Find the value of $e^{i\pi}$.

$e^{i\pi}$ ৰ মান উলিওৱা।

(iii) Define a symmetric matrix.

সমমিত মৌলকক্ষৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(iv) Give an example of a commutative ring without unity.

এটা ক্ৰম বিনিময় বলয়ৰ উদাহৰণ দিয়া যাৰ একক মৌল নাই।

(v) The square roots of $2i$ are

$2i$ ৰ বৰ্গমূলবোৰ হ'ল

(a) $\pm(-1-i)$

(b) $\pm(-1+i)$

(c) $\pm(1+i)$

(d) $\pm(1-i)$

(Choose the correct option)

(সঠিক বিকল্পটো বাছি উলিওৱা)

(vi) What is the rank of an identity matrix of order 2 ?

২ মাত্ৰাৰ একক মৌলকক্ষৰ কোটি কিমান?

(vii) Let G be a group of order 6. Can there exist a subgroup of G whose order is 4 ?

ধৰা হ'ল G এটা 6 মাত্ৰাৰ সংঘ। G ৰ এনে এটা উপসংঘ থাকিব পাৰেনে যাৰ মাত্ৰা 4 ?

(viii) Fill in the blank :

খালী ঠাই পূৰ কৰা :

If $AB = C$, where B and C are matrices of order 3×5 , then order of A is _____.

যদি $AB = C$, য'ত B আৰু C দুয়োটাৰে 3×5 মাত্ৰাৰ মৌলকক্ষ, তেন্তে A ৰ মাত্ৰা হ'ব _____।

(ix) Fill in the blank :

খালী ঠাই পূৰ কৰা :

The number of generators of a cyclic group G of order 8 is _____.

এটা 8 মাত্ৰাৰ চক্ৰীয় সংঘ G ৰ জনকৰ সংখ্যা _____।

(x) When are two matrices said to be conformable for multiplication?

দুটা মৌলকক্ষক কেতিয়া পূৰণৰ বাবে উপযোগী বুলি কোৱা হয়?

2. Answer the following : $2 \times 5 = 10$

তলৰ দিয়াবোৰৰ উত্তৰ লিখা :

(i) If α, β, γ are roots of the equation $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, then find the value of $\sum \alpha^2$

যদি $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ সমীকৰণৰ মূল α, β, γ হয়, তেন্তে $\sum \alpha^2$ ৰ মান উলিওৱা।

(ii) Let R be a ring and $x^2 = x, \forall x \in R$. Prove that $2x = 0, \forall x \in R$.

ধৰা হ'ল R এটা বলয় আৰু $x^2 = x, \forall x \in R$. প্রমাণ কৰা যে $2x = 0, \forall x \in R$.

(iii) Give an example to show that the union of two subgroups of a group may not be a subgroup.

উদাহৰণৰ সহায়ত দেখুওৱা যে, এটা সংঘৰ দুটা উপসংঘৰ মিলন এটা উপসংঘ নহ'বও পাৰে।

(iv) Find the rank of the following matrix :

তলত দিয়া মৌলকক্ষকটোৰ কোটি নিৰ্ণয় কৰা :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 2 & -1 & 7 \\ 1 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

(v) Find the eigenvalues of the following matrix :

তলৰ মৌলকক্ষকটোৰ আইগেনমান উলিওৱা :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Answer **any four** questions : $5 \times 4 = 20$

যিকোনো চাৰিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিয়া :

(i) Define cyclic group and give an example.

If a is a generator of a cyclic group G , then prove that a^{-1} is also a generator of G . $2+3=5$

চক্ৰীয় সংঘৰ সংজ্ঞা দিয়া আৰু এটা উদাহৰণ দিয়া।

যদি চক্ৰীয় সংঘ G ৰ a এটা জনক হয়, তেন্তে প্রমাণ কৰা যে a^{-1} ও G ৰ এটা জনক।

- (ii) Write the expansion of $\cos n\theta$ and hence show that

$$\cos 6\theta = \cos^6 \theta - 15 \cos^4 \theta \sin^2 \theta + 15 \cos^2 \theta \sin^4 \theta - \sin^6 \theta$$

$\cos n\theta$ ৰ বিস্তৃতিটো লিখা আৰু ইয়াৰ সহায়ত দেখুওৱা যে,

$$\cos 6\theta = \cos^6 \theta - 15 \cos^4 \theta \sin^2 \theta + 15 \cos^2 \theta \sin^4 \theta - \sin^6 \theta$$

- (iii) Prove that the intersection of two subrings of a ring is again a subring.

এটা বলয়ৰ দুটা উপবলয়ৰ ছেদনটো আকৌ এটা উপবলয় হয় বুলি প্ৰমাণ কৰা।

- (iv) If α, β, γ are the roots of the equation $x^3 + qx + r = 0$, find the value of

$$(\beta + \gamma)^{-1} + (\gamma + \alpha)^{-1} + (\alpha + \beta)^{-1}$$

যদি $x^3 + qx + r = 0$ সমীকৰণটোৰ α, β, γ মূল হয়, তেন্তে $(\beta + \gamma)^{-1} + (\gamma + \alpha)^{-1} + (\alpha + \beta)^{-1}$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

- (v) In a group G , show that
এটা সংঘ G ত দেখুওৱা যে,

$$(a)^{-1})^{-1} = a$$

$$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} \quad \forall a, b \in G \quad 2+3=5$$

- (vi) If A is an $m \times n$ matrix such that $\text{rank}(A) = r$, then prove that

$$A \sim N_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

যদি A এটা $m \times n$ মৌলিকৰূপ যাৰ কোটি r , প্ৰমাণ কৰা যে

$$A \sim N_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Answer **any four** questions : $10 \times 4 = 40$

যিকোনো চাৰিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ লিখা :

- (a) Show that the set

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

of all 2×2 matrices is a ring with unity under matrix addition and matrix multiplication.

Is this ring commutative? Justify your answer.

ধৰা হ'ল

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

এটা সকলো 2×2 মাত্ৰাৰ মৌলকক্ষৰ সংহতি। দেখুওৱা যে মৌলকক্ষৰ যোগ আৰু পূৰণ সাপেক্ষে M য়ে এটা বলয় গঠন কৰে।

এইটো বলয় ক্ৰম বিনিমেয় হয়নে? তোমাৰ উত্তৰৰ সপক্ষে যুক্তি দৰ্শোৱা।

- (b) (i) If A and B are non-singular matrices, then prove that AB is also non-singular such that

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \text{ and } (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$

3+3=6

যদি A আৰু B অক্ষীয়মান মৌলকক্ষ হয়, তেন্তে প্রমাণ কৰা যে, AB ও এটা অক্ষীয়মান মৌলকক্ষ যাতে

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \text{ আৰু } (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$

- (ii) Let A and B be two square matrices such that $AB = B$ and $AB = A$. Prove that $A^2 = A$ and $B^2 = B$
- 4

ধৰা হ'ল A আৰু B দুটা বৰ্গ মৌলকক্ষ যাতে $AB = B$ আৰু $AB = A$ । প্রমাণ কৰা যে, $A^2 = A$ আৰু $B^2 = B$ ।

- (c) (i) Solve the equation

$2x^3 + x^2 - 7x - 6 = 0$ given that the difference of two of the roots is 3. 5

$2x^3 + x^2 - 7x - 6 = 0$ সমীকৰণটো সমাধান কৰা যাৰ দুটা মূলৰ পাৰ্থক্য/অন্তৰ 3।

- (ii) Solve the following homogeneous system of equations (if exist): 5

তলৰ সমাংগ সমীকৰণ প্ৰণালীটো সমাধান কৰা (যদি সমাধান আছে):

$$x + 3y + 2z = 0$$

$$x + 4y + 3z = 0$$

$$x + 5y + 4z = 0$$

- (d) (i) Let A be a square matrix. For all $\alpha \notin \sigma(A)$, prove that x is an eigenvector of A if and only if x is an eigenvector of $(A - \alpha I)^{-1}$. 6

ধৰা হ'ল A এটা বৰ্গ মৌলকক্ষ। সকলোবোৰ $\alpha \notin \sigma(A)$ ৰ বাবে প্রমাণ কৰা যে x , A ৰ এটা আইগেনভেক্টৰ যদি আৰু যদিহে x , $(A - \alpha I)^{-1}$ ৰ এটা আইগেনভেক্টৰ।

(ii) In a ring R , prove that

এটা বলয় R ত প্রমাণ কৰা যে

(a) $a \cdot 0 = 0$

(b) $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$

(c) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b \quad \forall a, b \in R$

$$1 + 1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} = 4$$

(e) (i) State and prove De Moivre's theorem for positive integral index.

$$1 + 5 = 6$$

ধনাত্মক অখণ্ড সূচকৰ বাবে ডি মইভাৰৰ উপপাদ্যটো লিখা আৰু প্রমাণ কৰা।

(ii) If $x + \frac{1}{x} = 2 \cos \theta$, θ is real.

Prove that

$$x^n + \frac{1}{x^n} = 2 \cos n\theta, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

যদি $x + \frac{1}{x} = 2 \cos \theta$, θ বাস্তৱ, প্রমাণ কৰা

$$\text{যে } x^n + \frac{1}{x^n} = 2 \cos n\theta, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad 4$$

(f) (i) Prove that a non-empty subset H of a group G is a subgroup of G if and only if $a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$.

5

প্রমাণ কৰা যে, G সংঘৰ এটা অধিসংঘ

উপসংহতি H নিজে G ৰ এটা উপসংঘ হ'ব

যদি আৰু যদিহে $a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$ ।

(ii) Solve the following equation using De Moivre's theorem: 5

ডি মইভাৰৰ উপপাদ্য ব্যৱহাৰ কৰি তলৰ সমীকৰণটো সমাধান কৰা।

$$x^7 + x^4 + x^3 + 1 = 0.$$

(g) (i) Reduce the following matrix to row echelon form:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Determine the rank and identify the basic columns 5

তলৰ মৌলকম্পটো শাৰী এচেলন ৰূপলৈ লঘুকৃত কৰা :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

কোটি উলিওৱা আৰু মূলস্তম্ভ কেইটা চিনাক্ত কৰা।

- (ii) Find the condition that the equation $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ should have two roots equal in magnitude but of opposite sign.

5

$x^3 + px^2 + qx + r = 0$ সমীকৰণটোৰ দুটা মূল মানত সমান কিন্তু বিপৰীত চিহ্নযুক্ত হোৱাৰ চৰ্তটো নিৰ্ণয় কৰা।

- (h) (i) If H is a subgroup of a finite group G , then prove that the order of H divides the order of G .

5

যদি H , এটা সীমিত সংঘ G -ৰ উপসংঘ, তেনেহলে প্রমাণ কৰা যে, H -ৰ মাত্ৰাই G -ৰ মাত্ৰাক ভাগ কৰে।

- (ii) Find the terms of p , q and r the values of the symmetric function

$$\frac{\beta^2 + \gamma^2}{\beta\gamma} + \frac{\gamma^2 + \alpha^2}{\gamma\alpha} + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} \text{ where}$$

α, β and γ are the roots of the cubic equation

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

5

p, q আৰু r ৰ সহায়ত

$$\frac{\beta^2 + \gamma^2}{\beta\gamma} + \frac{\gamma^2 + \alpha^2}{\gamma\alpha} + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} \text{ সমন্বিত}$$

ফলনটোৰ মান নিৰ্ণয় কৰা য'ত α, β আৰু γ হৈছে $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ ত্ৰিঘাত সমীকৰণটোৰ মূল।

OPTION-B

Paper : MAT-HG-2026

(Discrete Mathematics)

1. Choose the correct option in each of the following questions : $1 \times 10 = 10$

(a) Which of the following is equivalent to $a + ab$?

- (i) a
- (ii) ab
- (iii) $a(b+1)$
- (iv) b

(b) The Boolean expression $(a+b).(a+c)$ is simplified to

- (i) $a+bc$
- (ii) $a.b.c$
- (iii) $a+b+c$
- (iv) None of the above

(c) The dual of the expression $a+0=a$ is

- (i) $a.0=a$
- (ii) $a.1=a$

(iii) $a+1=a$

(iv) $a.0=0$

(d) A lattice with exactly two elements is called a

- (i) distributive lattice
- (ii) Boolean lattice
- (iii) Trivial lattice
- (iv) Bounded lattice

(e) In a distributive lattice, which property is satisfied?

- (i) $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
- (ii) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
- (iii) Both (i) and (ii)
- (iv) None of the above

(f) If a poset has both the least element and the greatest element, then the poset is

- (i) totally ordered
- (ii) bounded
- (iii) reflexive
- (iv) symmetric

(g) A subset of a poset in which every two elements are comparable is called a

- (i) chain
- (ii) antichain
- (iii) subgraph
- (iv) partial order

(h) Which is of the following properties not required for a relation to be partial order?

- (i) reflexive
- (ii) antisymmetric
- (iii) transitive
- (iv) symmetry

(i) Which of the following is not a law of lattices?

- (i) associative law
- (ii) commutative law
- (iii) idempotent law
- (iv) complement law

(j) Which operation is not part of Boolean algebra?

- (i) AND
- (ii) OR
- (iii) NOT
- (iv) SUBTRACTION

2. Answer the following questions: $2 \times 5 = 10$

(a) Simplify the expression:

$$(A \wedge B) \vee (A \wedge \sim B)$$

(b) State and prove one of the idempotent laws of lattices.

(c) What is the greatest element in a poset? Give an example.

(d) Write the complement of the expression $f = abc' + ab' + b'c'$

(e) Prove that in a Boolean algebra complements of 0 and 1 are 1 and 0 respectively.

3. Answer **any four** of the following questions:

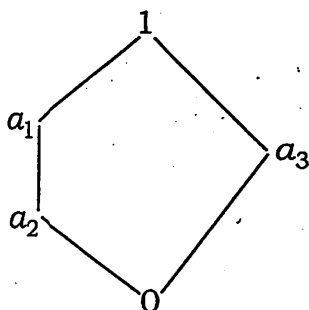
$$5 \times 4 = 20$$

(a) Prove that the elements 0 and 1 of Boolean algebra are unique.

- (b) Prove that for a bounded distributive lattice, the complement is unique, if exists.
- (c) Prove that every finite lattice is bounded.
- (d) Simplify Boolean expression
 $(A \wedge B) \vee (\sim A \wedge B) \vee (A \wedge \sim B)$
- (e) Construct Hasse diagram for the divisibility relation on the set $\{1, 2, 3, 6, 12\}$.
- (f) State and prove the absorption laws in Boolean algebra.
4. Answer **any four** of the following questions :
 10×4=40
- (a) (i) Let a, b, c be elements in a lattice (L, \leq) . Show that if $a \leq b$, then
 $a \vee (b \wedge c) \leq b \wedge (a \vee c)$
- (ii) Prove that product of two lattices is also a lattice. 5+5=10
- (b) Let L be a complemented and distributive lattice. Then prove that for any $a, b, c \in L$
- (i) $\overline{a \vee b} = \bar{a} \wedge \bar{b}$

- (ii) $\overline{a \wedge b} = \bar{a} \vee \bar{b}$ 5+5=10
- (c) Express the Boolean expressions as sum-of-product and then in its complete sum-of-product form :
- (i) $z(x' + y) + y'$
- (ii) $(x' + y)' + x'y$ 5+5=10
- (d) (i) Prove that the set N of natural numbers under divisibility forms a poset.
- (ii) State and prove the idempotent law in a Boolean algebra. 5+5=10
- (e) Prove that n variable Boolean function having products of all maxterms is zero.
- (f) (i) Define a complete lattice with an illustrated example. Is (Z, \leq) a complete lattice?
- (ii) Define modular lattice. Prove that every distributive lattice is modular but the converse is not true. 5+5=10
- (g) (i) State and prove De Morgan's law in Boolean algebra.

- (ii) Show that lattice L given below is not modular : 5+5=10



- (h) (i) Show with an example that the union of two sublattices may not be a sublattice.

- (ii) Prove that a poset (L, \leq) is a lattice if and only if every non-empty finite subset of L has *glb* and *lub*.

5+5=10
