Total number of printed pages–11

1 (Sem–2) MAT

2025

MATHEMATICS

Paper : MAT0200104

(Calculus)

Full Marks : 60

Time : 2½ hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

*Answer **either** in English **or** in Assamese.*

1. Answer the following questions : 1×8=8

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

(a) Find (মান নিৰ্ণয় কৰা) :

$$\lim_{x \to 2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{4}{x^2-4}\right)$$

(b) A function f is defined as

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-m^2}{x-m} & , \text{ if } x\neq m\\ 0 & , \text{ if } x=m\end{cases}$$

Is the function continuous at $x=m$?

এটা ফলন f তলত দিয়া ধৰণে সংজ্ঞাৱদ্ধ কৰা হৈছে। $x=m$ বিন্দুত ফলনটো অবিচ্ছিন্ন হয় নে?

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-m^2}{x-m} & , \text{ if } x\neq m\\ 0 & , \text{ if } x=m\end{cases}$$

(c) What is the nth derivative of e^{ax}?

e^{ax} অৰ n-তম অৱকলজটো কি?

(d) Write the value of $\int_0^{\pi/2} \cos^7 x\,dx$.

$\int_0^{\pi/2} \cos^7 x\,dx$ অৰ মান লিখা।

(e) Write in sigma notation the nth Maclaurin polynomial for a function f.

f ফলনৰ n-তম মেক্‌লৰিন বহুপদীটো চিগ্‌মা চিহ্নত লিখা।

(f) Find the slope of the surface $z=x^2y+5y^3$ in the x-direction at the point $(1,-2)$.

$z=x^2y+5y^3$ পৃষ্ঠৰ $(1,-2)$ বিন্দুত x অৰ দিশত প্ৰৱণতা নিৰ্ণয় কৰা।

(g) If $f(x,y)=\sin^{-1}\left(\dfrac{x}{y}\right)$, find f_{xy}.

যদি $f(x,y)=\sin^{-1}\left(\dfrac{x}{y}\right)$, তেন্তে f_{xy} উলিওৱা।

(h) Write down the value of $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}$, if $z=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

$z=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ হ'লে $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}$-ৰ মান লিখা।

2. Answer ***any six*** questions : $2\times6=12$

যিকোনো ছয়টা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

(a) Show with ε-δ definition of limit that $\lim\limits_{x\to1}(3x+2)=5$.

চৰমমানৰ ε-δ সংজ্ঞাৰ সহায়ত দেখুওৱা যে

$\lim_{x \to 1} (3x+2) = 5$ ।

(b) Using the Intermediate Value Theorem, show that the equation

$5x^3 - 2x^2 + 3x = 4$ has at least one solution between 0 and 1.

মধ্যমমান উপপাদ্যৰ সহায় লৈ দেখুওৱা যে

$5x^3 - 2x^2 + 3x = 4$ সমীকৰণটোৰ অন্ততঃ এটা সমাধান 0 আৰু 1-ৰ মাজত আছে।

(c) If (যদি) $y = e^{\tan^{-1} x}$, prove that (প্ৰমাণ কৰা যে) $(1+x^2)\, y_2 + (2x-1)\, y_1 = 0$.

(d) If $y = x^{n-1} \log x$, find y_n.

যদি $y = x^{n-1} \log x$, তেন্তে y_n নিৰ্ণয় কৰা।

(e) Evaluate (মান উলিওৱা) :

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{(1+x^6)^{7/2}}\, dx$$

(f) Verify Rolle's theorem for the function $f(x) = x^2 - 2x - 3$ on the interval $[-1, 3]$.

$[-1, 3]$ অন্তৰালত $f(x) = x^2 - 2x - 3$ ফলনটোৰ বাবে ৰ'লৰ উপপাদ্যটো সাব্যস্ত কৰা।

(g) Prove that (প্ৰমাণ কৰা যে)

$$\log(1+x) < x - \frac{x^2}{2(1+x)},\ x > 0.$$

(h) If $w = y^3 e^{2x+3z}$, find $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}$ and $\frac{\partial w}{\partial z}$.

যদি $w = y^3 e^{2x+3z}$, তেন্তে $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}$ আৰু $\frac{\partial w}{\partial z}$ উলিওৱা।

(i) If $f(x, y, z) = x^2 y + y^2 z - 2xz$, find f_{xy} and f_{zx}.

যদি $f(x, y, z) = x^2 y + y^2 z - 2xz$, তেন্তে f_{xy} আৰু f_{zx} নিৰ্ণয় কৰা।

(j) If (যদি) $u = \frac{x^2 y^2}{x+y}$, prove that

(প্ৰমাণ কৰা যে) $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 3u$.

3. Answer ***any four*** questions : 5×4=20

যিকোনো চাৰিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ কৰা ঃ

(a) Find (মান নিৰ্ণয় কৰা) :

(i) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}{x}$

(ii) $\lim_{x \to \infty} \frac{2x+1}{\sqrt[3]{x^3 - 2}}$

(b) For what value of k the following function is continuous?

k-ৰ কি মানৰ বাবে তলত দিয়া ফলনটো অবিচ্ছিন্ন হ'ব?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{7x+2} - \sqrt{6x+4}}{x-2} & \text{if} \quad x \geq -\frac{2}{7} \text{ and } x \neq 2 \\ k & \text{if} \quad x = 2 \end{cases}$$

(c) If (যদি) $y = e^{m \sin^{-1} x}$, prove that (প্ৰমাণ কৰা যে)

$$(1-x^2) y_{n+2} - (2n+1) x y_{n+1} - (n^2 + m^2) y_n = 0.$$

(d) Obtain reduction formula for $\int \tan^n x\, dx$. If $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x\, dx$, show that

(i) $I_n + I_{n-2} = \frac{1}{n-1}$

(ii) $n(I_{n-1} + I_{n+1}) = 1$

$\int \tan^n x\, dx$-ৰ হ্ৰাসমান সূত্ৰ উলিওৱা। যদি $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x\, dx$, তেন্তে দেখুওৱা যে

(i) $I_n + I_{n-2} = \frac{1}{n-1}$

(ii) $n(I_{n-1} + I_{n+1}) = 1$

(e) (i) Apply Rolle's theorem on the function $f(x) = (x-1) \sin x$ to show that the equation $x + \tan x = 1$ has at least one root in the interval (0, 1).

$f(x) = (x-1)\sin x$ ফলনটোত ৰ'লৰ উপপাদ্য প্ৰয়োগ কৰি দেখুওৱা যে $x + \tan x = 1$ সমীকৰণটোৰ অন্ততঃ এটা মূল $(0, 1)$ অন্তৰালত আছে।

(ii) If a function f defined on $[a, b]$ satisfies the conditions of Lagrange's Mean Value Theorem and $f'(x) = 0 \, \forall x \in [a, b]$, then show that $f(x)$ is constant on $[a, b]$.

$[a, b]$ অন্তৰালত সংজ্ঞাবদ্ধ এটা ফলন f এ যদি লাগ্ৰাঞ্জৰ মধ্যমান উপপাদ্যটোৰ চৰ্ত কেইটা মানি চলে আৰু $f'(x) = 0 \, \forall x \in [a, b]$, তেন্তে দেখুওৱা যে $[a, b]$ অন্তৰালত $f(x)$ এটা ধ্ৰুৱক।

(f) Expand $\cos x$ by Maclaurin series.

$\cos x$ অৰ মেক্লৰিন শ্ৰেণী বিস্তাৰ কৰা।

(g) If (যদি) $u = x^2 \tan^{-1}\frac{y}{x} - y^2 \tan^{-1}\frac{x}{y}, \; xy \neq 0$, prove that (প্ৰমাণ কৰা যে)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

(h) If $z = \cot^{-1}\left(\frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)$, show by Euler's theorem that $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{1}{4}\sin 2z = 0$.

যদি $z = \cot^{-1}\left(\frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)$, অইলাৰৰ উপপাদ্যৰ সহায়ত প্ৰমাণ কৰা যে

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{1}{4}\sin 2z = 0 \text{ ।}$$

4. Answer ***any two*** questions : 10×2=20

যিকোনো দুটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ কৰা ঃ

(a) When is a function said to be continuous at a point? Examine the continuity of the function

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & , \; x \leq 0 \\ 5x - 4 & , \; 0 < x < 1 \\ 4x^2 - 3x & , \; 1 < x < 2 \\ 3x + 4 & , \; x \geq 2 \end{cases}$$

at the points $x = 0, 1, 2$.

এটা ফলনক এটা বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন বুলি কেতিয়া কোৱা হয়? $x = 0, 1, 2$ বিন্দুত $f(x)$ ফলনটোৰ অবিচ্ছিন্নতা পৰীক্ষা কৰা —

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & , \ x \le 0 \\ 5x-4 & , \ 0 < x < 1 \\ 4x^2 - 3x & , \ 1 < x < 2 \\ 3x+4 & , \ x \ge 2 \end{cases}$$

(b) Obtain $\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{ax+b}\right)$. Hence, find the nth derivative of $y = \frac{x}{x^2+a^2}$.

$\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{ax+b}\right)$ নিৰ্ণয় কৰা। ইয়াৰ সহায়ত $y = \frac{x}{x^2+a^2}$-ৰ n-তম অৱকলজ উলিওৱা।

(c) Obtain reduction formula for $\int \sin^n x \, dx$. Hence evaluate $\int \sin^6 x \, dx$.

$\int \sin^n x \, dx$ অৰ হ্ৰাসমান সূত্ৰ উলিওৱা। ইয়াৰ সহায়ত $\int \sin^6 x \, dx$ অৰ মান উলিওৱা।

(d) (i) Write Taylor's formula with remainder.

ভাগশেষৰ সৈতে টেইলৰৰ সূত্ৰটো লিখা।

(ii) Expand $\sin x$ in powers of $\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

$\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$-ৰ ঘাতত $\sin x$ অক বিস্তাৰ কৰা।

(e) If (যদি) $u = \tan^{-1}\left(\frac{x^3+y^3}{x-y}\right)$, $x \ne y$, show that (দেখুওৱা যে)

(i) $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \sin 2u$

(ii) $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(1 - 4\sin^2 u\right)\sin 2u$