OPTION–B

Paper : MAT–HG–1026

(Honours Generic)

(Analytical Geometry)

Full Marks : 80

Time : Three hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

*Answer **either** in English **or** in Assamese.*

1. Answer the following questions : 1×10=10

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ লিখা ঃ

(i) Under what condition $ax^2+2hxy+by^2=0$ may represent a pair of parallel straight line ?

কি চৰ্ত সাপেক্ষে $ax^2+2hxy+by^2=0$ এ এযোৰ পৰস্পৰ সমান্তৰাল সৰলৰেখা নিৰূপণ কৰে?

(ii) Find the point on the conic

$$\frac{8}{r}=3-\sqrt{2}\cos\theta$$

whose radius vector is 4.

$\frac{8}{r}=3-\sqrt{2}\cos\theta$ শাংকৱৰ ওপৰত থকা বিন্দু এটা নিৰ্ণয় কৰা য'ত ব্যাসাৰ্ধ ভেক্টৰ 4।

(iii) Define conjugate diameters of an ellipse.

উপবৃত্ত এটাৰ সংযুগ্ম ব্যাসৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(iv) Express the parabola $y^2=4ax$ in parametric form.

$y^2=4ax$ অধিবৃত্তটোক প্ৰাচলিক আকাৰত প্ৰকাশ কৰা।

(v) By what angle the axes are to be rotated to remove the xy–term from the equation $ax^2+2hxy+by^2=0$?

অক্ষ দুডালক কি কোণত ঘুৰালে $ax^2+2hxy+by^2=0$ সমীকৰণটো xy–পদ মুক্ত হ'ব?

(vi) Define cross product of two vectors.

দুটা ভেক্টৰৰ সদিশ পূৰণৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(vii) Find the centre and radius of the sphere $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=16$

$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=16$ গোলকটোৰ কেন্দ্ৰ আৰু ব্যাসাৰ্ধ নিৰ্ণয় কৰা।

(viii) Find the unit vector that has the same direction as $\bar{u} = 2i + 2j - k$.

$\bar{u} = 2i + 2j - k$ ৰ দিশত একক ভেক্টৰ নিৰ্ণয় কৰা।

(ix) What is the value of $i \times (i + j + k)$?

$i \times (i + j + k)$ ৰ মান কিমান?

(x) Find parametric equations of the line passing through (4, 2) and parallel to $\bar{v} = (-1, 5)$.

(4, 2) বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা $\bar{v} = (-1, 5)$ ৰ সমান্তৰাল ৰেখাৰ প্ৰাচলিক সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

2. Answer the following questions : $2 \times 5 = 10$

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

(a) Find the angle between the vectors $\bar{u} = i - 2j + 2k$ and $\bar{v} = -3i + 6j + 2k$.

$\bar{u} = i - 2j + 2k$ আৰু $\bar{v} = -3i + 6j + 2k$ ভেক্টৰ দুটাৰ মাজৰ কোণ নিৰ্ণয় কৰা।

(b) Prove that the equation

$$2x^2 + 3xy - 2y^2 + 7x - y + 3 = 0$$

represents a pair of perpendicular lines.

প্ৰমাণ কৰা যে

$2x^2 + 3xy - 2y^2 + 7x - y + 3 = 0$ এ এযোৰ পৰস্পৰ লম্বভাৱে থকা সৰলৰেখা নিৰূপণ কৰে।

(c) Find the co-ordinates of the focus and the vertex of the parabola

$y^2 - 4y - 2x - 8 = 0$.

$y^2 - 4y - 2x - 8 = 0$ অধিবৃত্তটোৰ কেন্দ্ৰ আৰু শীৰ্ষবিন্দু নিৰ্ণয় কৰা।

(d) Show that if the polar of P w.r. to an ellipse passes through Q, then the polar of Q passes through P.

দেখুওৱা যে এটা উপবৃত্ত সাপেক্ষে P বিন্দুৰ ধ্ৰুৱীয় ৰেখাডাল Q বিন্দুৰেদি গ'লে, Q বিন্দুৰ ধ্ৰুৱীয় ৰেখাডালো P য়েদি যাব।

(e) Find the direction cosines of the vector $\bar{v} = 2i - 4j + 4k$.

$\bar{v} = 2i - 4j + 4k$ ভেক্টৰটোৰ দিশাংক নিৰ্ণয় কৰা।

3. Answer the following questions : ***(any four)*** $5 \times 4 = 20$

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া ঃ *(যিকোনো চাৰিটা)*

(a) By a suitable transformation remove the term containing xy from the equation $11x^2 + 4xy + 14y^2 = 5$.

Contd.

এটা যথোপযুক্ত ৰূপান্তৰৰ সহায়ত $11x^2+4xy+14y^2=5$ সমীকৰণটোৰ পৰা xy পদটো বিলোপ কৰা।

(b) Find a vector that is orthogonal to both of the vectors $\vec{u}=(2,-1,3)$ and $\vec{v}=(-7,2,-1)$.

$\vec{u}=(2,-1,3)$ আৰু $\vec{v}=(-7,2,-1)$ ভেক্টৰ দুটাৰ উভয়ৰে লম্ব হোৱা ভেক্টৰ এটা নিৰ্ণয় কৰা।

(c) The normal at the point $\left(at_1^2, 2at_1\right)$ meets the parabola again at the point $\left(at_2^2, 2at_2\right)$. Prove that $t_2=-t_1-\dfrac{2}{t_1}$.

$\left(at_1^2, 2at_1\right)$ বিন্দুত টনা অভিলম্ব ডালে অধিবৃত্তটোক $\left(at_2^2, 2at_2\right)$ বিন্দুত সংযোজিত হয়। প্ৰমাণ কৰা যে,

$t_2=-t_1-\dfrac{2}{t_1}$

(d) Find the polar equation of a conic in the form $\dfrac{l}{r}=1+e\cos\theta$.

এটা শাংকৱৰ ধ্ৰুবীয় সমীকৰণ $\dfrac{l}{r}=1+e\cos\theta$ আকাৰত নিৰ্ণয় কৰা।

(e) Reduce the equation

$$x^2+4xy+y^2-2x+2y+6=0$$

to standard form.

$$x^2+4xy+y^2-2x+2y+6=0$$

সমীকৰণটোক আদৰ্শ আকাৰলৈ ৰূপান্তৰ কৰা।

(f) Find the equation of the bisectors of the angles between the pair of lines given by $ax^2+2hxy+by^2=0$.

$ax^2+2hxy+by^2=0$ সমীকৰণে বুজোৱা ৰেখা দুডালৰ মাজৰ কোণৰ সমদ্বিখণ্ডকৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

Answer ***either*** (a) ***or*** (b) from each of the following ***four*** equations : 10×4=40

তলৰ *চাৰিটা* সমীকৰণৰ প্ৰতিটোৰ (a) *অথবা* (b) অংশৰ উত্তৰ কৰা ঃ

4. (a) (i) Find the equation of the tangent to the conic

$$4x^2+3xy+2y^2-3x+5y+7=0$$

at the point $(1,-2)$.

$(1,-2)$ বিন্দুত

$$4x^2+3xy+2y^2-3x+5y+7=0$$

শাংকৱৰ ওপৰত টনা স্পৰ্শকৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

Contd.

(ii) Show that a homogeneous equation of second degree in x and y represents a pair of straight lines passing through the origin.

দেখুওৱা যে, x আৰু y ৰ দ্বিঘাতৰ এটা সুষম সমীকৰণে মূলবিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা এযোৰ সৰলৰেখাক বুজাব?

(b) If by a transformation from one set of rectangular axes to another with the same origin the expression

$$ax^2 + 2hxy + by^2$$

changes to $ax'^2 + 2hx'y' + by'^2$, then $a + b = a' + b'$ and $ab - h^2 = a'b' - h'^2$.

মূলবিন্দু সাপেক্ষে আয়তীয় অক্ষদ্বয়ক ঘুৰালে যদি $ax^2 + 2hxy + by^2$ ৰাশিটো $ax'^2 + 2hx'y' + by'^2$ লৈ পৰিবৰ্তিত হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে $a + b = a' + b'$ আৰু $ab - h^2 = a'b' - h'^2$।

5. (a) (i) Find an equation of the line in 3-space that passes through the points $P(2, 4, -1)$ and $Q(5, 0, 7)$.

$P(2, 4, -1)$ আৰু $Q(5, 0, 7)$ বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা ৰেখাৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

(ii) Calculate the scalar triple product $\vec{u}.(\vec{v} \times \vec{w})$ of the vectors $\vec{u} = 3i - 2j - 5k$, $\vec{v} = i + 4j - 4k$ and $\vec{w} = 3j + 2k$.

$\vec{u} = 3i - 2j - 5k$, $\vec{v} = i + 4j - 4k$ আৰু $\vec{w} = 3j + 2k$ হ'লে, $\vec{u}.(\vec{v} \times \vec{w})$ নিৰ্ণয় কৰা।

(b) (i) Find the area of the triangle that is determined by the points $P(2, 2, 0)$, $Q(-1, 0, 2)$ and $R(0, 4, 3)$.

$P(2, 2, 0)$, $Q(-1, 0, 2)$ আৰু $R(0, 4, 3)$ বিন্দুৰে নিৰ্দেশ কৰা ত্ৰিভুজটোৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা।

(ii) Prove that

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}$$

প্ৰমাণ কৰা যে,

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}$$

6. (a) Show that the ortho-centre of the triangle formed by the lines $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ and $lx + my = 1$ is given by $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{a + b}{am^2 - 2hlm + bm^2}$.

Contd.

দেখুওৱা যে $ax^2+2hxy+by^2=0$ আৰু $lx+my=1$ ৰেখাৰে আবৃত ত্ৰিভুজটোৰ পাদিক কেন্দ্ৰ হ'ল $\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{a+b}{am^2-2hlm+bm^2}$

(b) Discuss the nature of the conic represented by

$3x^2-8xy-3y^2+10x-13y+8=0$.

$3x^2-8xy-3y^2+10x-13y+8=0$ সমীকৰণে নিৰ্দেশ কৰা শাংকৱৰ প্ৰকৃতি নিৰ্ণয় কৰা।

7. (a) (i) Show that the equation of the tangent to the conic $\frac{l}{r}=1+e\cos\theta$ at the point α is

$$\frac{l}{r}=e\cos\theta+\cos(\theta-\alpha)$$

দেখুওৱা যে $\frac{l}{r}=1+e\cos\theta$ শাংকৱটোৰ α বিন্দুত স্পৰ্শকৰ সমীকৰণ হ'ল

$$\frac{l}{r}=e\cos\theta+\cos(\theta-\alpha)$$

(ii) Obtain the equation of the chord of the conic $\frac{l}{r}=1+e\cos\theta$, joining the two points on the conic, whose vectorial angles are $(\alpha+\beta)$ and $(\alpha-\beta)$.

$\frac{l}{r}=1+e\cos\theta$ শাংকৱটোৰ $(\alpha+\beta)$ আৰু $(\alpha-\beta)$ বিন্দু সংযোগী জ্যাৰ সমীকৰণ উলিওৱা।

(b) (i) Find the condition that the line $a\cos\theta+b\sin\theta=\frac{l}{r}$ may be a normal to the conic $\frac{l}{r}=1+e\cos\theta$.

$a\cos\theta+b\sin\theta=\frac{l}{r}$ ৰেখাডাল $\frac{l}{r}=1+e\cos\theta$ শাংকৱৰ অভিলম্ব হোৱাৰ চৰ্ত্ত উলিওৱা।

(ii) Find the polar equation of a circle.

এটা বৃত্তৰ ধ্ৰুৱীয় সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

4000